Paper-1

JEE Advanced, 2017

Part III: Mathematics

Read the instructions carefully:

General:

1. This sealed booklet is your Question Paper. Do not break the seal till you are instructed to do so.

2. The question paper CODE is printed on the left hand top corner of this sheet and the right hand top corner of the back cover of this booklet.

3. Use the Optical Response Sheet (ORS) provided separately for answering the questions.

4. The paper CODE is printed on its left part as well as the right part of the ORS. Ensure that both these codes are identical and same as that on the question paper booklet. If not, contact the invigilator.

5. Blank spaces are provided within this booklet for rough work.

6. Write your name and roll number in the space provided on the back cover of this booklet.

7. After breaking the seal of the booklet at 9:00 am, verify that the booklet contains 36 pages and that all the 54 questions along with the options are legible. If not, contact the invigilator for replacement of the booklet.

8. You are allowed to take away the Question Paper at the end of the examination.

Optical Response Sheet

9. The ORS (top sheet) will be provided with an attached Candidate's Sheet (bottom sheet). The Candidate's Sheet is a carbon – less copy of the ORS.

10. Darken the appropriate bubbles on the ORS by applying sufficient pressure. This will leave an impression at the corresponding place on the Candidate's Sheet.

11. The ORS will be collected by the invigilator at the end of the examination.

12. You will be allowed to take away the Candidate's Sheet at the end of the examination.

13. Do not tamper with of mutilate the ORS. Do not use the ORS for rough work.

14. Write your name, roll number and code of the examination center, and sign with pen in the space provided for this purpose on the ORS. Do not write any of these details anywhere else on the ORS. Darken the appropriate bubble under each digit of your roll number.

Darken the Bubbles on the ORS

15. Use a Black Ball Point Pen to darken the bubbles on the ORS.

16. Darken the bubble completely.

17. The correct way of darkening a bubble is as:

18. The ORS is machine – gradable. Ensure that the bubbles are darkened in the correct way.

19. Darken the bubbles only if you are sure of the answer. There is no way to erase or “un–darken” a darkened bubble.

SECTION – 1 : (Maximum Marks : 28)

- This section contains **SEVEN** questions.
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONE OR MORE THAN ONE** of these four option(s) is(are) correct.
- For each question, darken the bubble(s) corresponding to all the correct option(s) in the ORS.
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories :
  Full Marks : +4 If only the bubble(s) corresponding to all the correct option(s) is(are) darkened.
  Partial Marks : +1 For darkening a bubble corresponding to **each correct option,** provided NO incorrect option is darkened.
  Zero Marks : 0 If none of the bubbles is darkened.
  Negative Marks : –2 In all other cases.
- For example, if (A), (C) and (D) are all the correct options for a question, darkening all these three will get +4 marks; darkening only (A) and (D) will get +2 marks and darkening (A) and (B) will get –2 marks, as a wrong option is also darkened.

खंड 1 : (अधिकतम अंक : 28)

- इस खंड में **सात** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में **चार** उत्तर विकल्प (A), (B), (C) तथा (D) हैं। जिनमें से **एक या एक से अधिक** विकल्प सही हैं।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए ओ.आर.एस. पर सारे सही उत्तर (उत्तरों) के अनुरूप बुलबुले (बुलबुलों) को काला करें।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक निम्नलिखित परिस्थितियों में से **किसी एक के अनुसार दिये जायेंगे :**
- पूर्ण अंक : +4 यदि सिर्फ सही विकल्प (विकल्पों) के अनुरूप बुलबुले (बुलबुलों) को काला किया है।
  आंशिक अंक : +1 प्रत्येक सही विकल्प के अनुरूप बुलबुले को काला करने पर, यदि कोई गलत विकल्प काला नहीं किया है।
  शून्य अंक : 0 यदि किसी भी बुलबुले को काला नहीं किया है।
  ऋण अंक : –2 अन्य सभी परिस्थितियों में
- उदाहारण : यदि एक प्रश्न के सारे सही उत्तर विकल्प (A), (C) तथा (D) हैं, तब इन तीनों के अनुरूप बुलबुलों को काले करने पर +4 अंक मिलेंगे ; सिर्फ (A) और (D) के अनुरूप बुलबुलों को काले करने पर +2 अंक मिलेंगे तथा (A) और (B) के अनुरूप बुलबुलों को काले करने पर –2 अंक मिलेंगे क्योंकि एक गलत विकल्प के अनुरूप बुलबुले को भी काला किया गया है।

37. Let X and Y be two events such that $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ and $P(Y|X) = \frac{2}{5}$. Then

माना कि X और Y इस प्रकार की दो घटनायें (events) हैं कि $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ और $P(Y|X) = \frac{2}{5}$ है। तब

(A) $P(Y) = \frac{4}{15}$ (B) $P(X'|Y) = \frac{1}{2}$ (C) $P(X \cup Y) = \frac{2}{5}$ (D) $P(X \cap Y) = \frac{1}{5}$

Ans. (A,B)

Sol. $\frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{1}{2}$

$\frac{P(Y \cap X)}{P(X)} = \frac{2}{5}$

$P(X \cap Y) = \frac{P(Y)}{2} = \frac{2}{5}P(X) = \frac{2}{5}.\frac{1}{3} = \frac{2}{15} \Rightarrow P(Y) = \frac{4}{15}$

$\frac{P(\bar{X} \cap Y)}{P(Y)} = \frac{P(Y) - P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{4}{15} - \frac{2}{15}}{\frac{4}{15}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$

38. Let $f : R \to (0, 1)$ be a continuous function. Then, which of the following function(s) has (have) the value zero at some point in the interval (0, 1) ?

माना कि $f : R \to (0, 1)$ एक सतत् फलन (continuous function) है। तब निम्न फलनों में से कौन से फलन (नों) का (के) मान अन्तराल (interval) (0, 1) के किसी बिन्दु पर शून्य होगा

(A) $e^x - \int_0^x f(t) \sin t \, dt$

(B) $f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin t \, dt$

(C) $x - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t) \cos t \, dt$

(D) $x^9 - f(x)$

Ans. **(C,D)**

Sol. $e^x \in (1,e)$ for $x \in (0,1)$ के लिए

and और $0 < \int_0^x f(t) \sin t \, dt < 1$ in (0,1) $\Rightarrow$ (A) is wrong (असत्य है)

$f(x) + \int_0^{\pi/2} f(t) \sin t \, dt > 0$ $\Rightarrow$ (B) is wrong (असत्य है)

Let माना $g(x) = x - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t) \cos t \, dt$ $\Rightarrow$ $g(0) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t \, dt < 0$

$g(1) = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(t) \cos t \, dt > 0$ $\Rightarrow$ (C) is correct (सत्य है)

Let माना $h(x) = x^9 - f(x)$

$h(0) = -f(0) < 0$

$h(1) = 1 - f(1) > 0$ $\Rightarrow$ (D) is correct (सत्य है)

39. Let a, b, x and y be real numbers such that a – b = 1 and y ≠ 0. If the complex number z = x + *i*y satisfies $\text{Im}\left(\frac{az+b}{z+1}\right)$ = y, then which of the following is(are) possible value(s) of x ?

माना कि a, b, x और y इस प्रकार की वास्तविक संख्यायें (real numbers) हैं कि a – b = 1 और y ≠ 0 है। यदि सम्मिश्र संख्या (complex number) z = x + *i*y, $\text{Im}\left(\frac{az+b}{z+1}\right)$ = y को सन्तुष्ट करती है, तब निम्न में से कौन सा(से) x का(के) सम्भावित मान है(हैं) ?

(A) $1 - \sqrt{1+y^2}$ (B) $-1-\sqrt{1-y^2}$ (C) $1 + \sqrt{1+y^2}$ (D) $-1 + \sqrt{1-y^2}$

Ans. **(B,D)**

Sol. $\frac{a(x+iy)+b}{x+iy+1} = \frac{ax+b+iay}{x+1+iy} \times \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy} = \frac{(ax+b)(x+1)+ay^2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{i(ay(x+1)-y(ax+b))}{(x+1)^2+y^2}$

$\Rightarrow \frac{ay(x+1)-y(ax+b)}{(x+1)^2+y^2} = y$ $\Rightarrow \frac{ay-by}{(x+1)^2+y^2} = y$ $(\because a-b=1,\ y \neq 0)$

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 1$ $\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{1-y^2}$ $\Rightarrow$ $x = -1 \pm \sqrt{1-y^2}$

40. If 2x – y + 1 = 0 is a tangent to the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$, then which of the following CANNOT be sides of a right angled triangle ?

यदि 2x – y + 1 = 0 अतिपरवलय (hyperbola) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ की स्पर्शरेखा (tangent) है तो निम्न में से कौन सी समकोणीय त्रिभुज (right angled triangle) की भुजायें नही हो सकती है(हैं) ?

(A) a, 4, 1 (B) 2a, 4, 1 (C) a, 4, 2 (D) 2a, 8, 1

Ans. **(A,C,D)**

Sol. y = 2x + 1 is tangent to $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ की स्पर्श रेखा y = 2x + 1 है।

$c^2 = a^2m^2 - b^2$

$1 = 4a^2 - 16 \Rightarrow a^2 = \frac{17}{4}$

[check if जाँचऐं कि $p^2 = q^2 + r^2$]

41. Let [x] be the greatest integer less than or equals to x. Then, at which of the following point(s) the function f(x) = x cos(π(x + [x])) is discontinuous ?

माना कि x से छोटा या x के समान सबसे बड़ा पूर्णांक (integer) [x] है। तब f(x) = cos(π(x + [x])), निम्न में से किन बिन्दु(ओं) पर असतत (discontinuous) है ?

(A) x = – 1 (B) x = 1 (C) x = 0 (D) x = 2

Ans. **(A,B,D)**

Sol. $f(x) = x\cos(\pi (x + [x])$

Check continuity at $x = n$

($x = n$ पर सतत्ता की जाँच करने पर)

$f(n) = n\cos 2n\pi = n$

$f(n^+) = n\cos 2n\pi = n$

$f(n^-) = n\cos(2n-1)\pi = -n$

It is discontinous at all integer points except 0

(यह 0 को छोड़कर सभी पूर्णांकों पर सतत् है।)

42. Which of the following is(are) NOT the square of a 3×3 matrix with real entries?

निम्न में से कौनसा(से) वास्तविक संख्याओं के 3×3 आव्यूह (matrix) का वर्ग (square) नहीं है(हैं)?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ans. **(A,C)**

Sol. $A = B^2 \Rightarrow |A| = |B|^2 = +ve$

(A) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) =$ negative (ऋणात्मक)

Matrix B can not be possible (आव्यूह B सम्भव नहीं हैं)

(B) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\ (1-0) =$ positive (धनात्मक)

Matrix B can be possible (आव्यूह B सम्भव हैं)

Ex. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 =$ negative (ऋणात्मक)

Matrix B can not be possible (आव्यूह B सम्भव नहीं हैं)

(D) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 =$ positive (धनात्मक)

Matrix B can be I (आव्यूह B, I सम्भव हैं)

43. If a chord, which is not a tangent, of the parabola $y^2 = 16x$ has the equation $2x + y = p$, and midpoint (h, k), then which of the following is(are) possible value(s) of p, h and k?

यदि परवलय (parabola) $y^2 = 16x$ की एक जीवा (chord), जो स्पर्शरेखा (tangent) नही है, का समीकरण $2x + y = p$ तथा मध्यबिन्दु (midpoint) (h, k) है, तो निम्न में से p, h एवम् k के सम्भावित मान है(हैं)?

(A) $p = -1, h = 1, k = -3$
(B) $p = 2, h = 3, k = -4$
(C) $p = -2, h = 2, k = -4$
(D) $p = 5, h = 4, k = -3$

Ans. **(B)**

Sol. $8x - ky + (k^2 - 8h) = 0$

$2x + y - p = 0$

Comparing coefficients of x, y and constant term, we get

x, y तथा अचर पदों के गुणाकों की तुलना करने पर

$$4 = -k = \frac{k^2 - 8h}{-p}$$

$k = -4$

$16 - 8h = -4p$

$4 - 2h = -p \quad \Rightarrow \quad p = 2h - 4$

SECTION – 2 : (Maximum Marks : 15)

- This section contains **FIVE** questions.
- The answer to each question is a **SINGLE DIGIT INTEGER** ranging from 0 to 9, both inclusive.
- For each question, darken the bubble corresponding to the correct integer in the ORS.
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories :
  Full Marks : +3 If only the bubble corresponding to the correct answer is darkened.
  Zero Marks : 0 In all other cases.

खंड 2 : (अधिकतम अंक : 15)

- इस खंड में **पाँच** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 0 से 9 तक (दोनों शामिल) के बीच का एक **एकल अंकीय पूर्णांक** है।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए ओ. आर. एस. पर सही पूर्णांक के अनुरूप बुलबुले को काला करें।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक निम्नलिखित परिस्थितियों में से किसी एक के अनुसार दिये जायेंगे :
- पूर्ण अंक : +3 यदि सिर्फ सही उत्तर के अनुरूप बुलबुले को काला किया है।
  शून्य अंक : 0 अन्य सभी परिस्थितियों में

44. For a real number α, if the system

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

of linear equations, has infinitely many solutions, then $1 + \alpha + \alpha^2 =$

वास्तविक संख्या (real number) α के लिए, यदि रैखिक समीकरण निकाय (system of linear equations)

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

के अनन्त हल (infinitely many solutions) हैं, तब $1 + \alpha + \alpha^2 =$

Ans. **(1)**

Sol. D = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (1+\alpha+\alpha^2) & (2\alpha+1) & (\alpha^2+\alpha+1) \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (1+\alpha+\alpha^2) & (2\alpha+1) & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha & 1-\alpha^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\alpha^2)(1+\alpha+\alpha^2-2\alpha^2-\alpha) = 0 \quad \Rightarrow (1-\alpha^2) = 0$$

$\alpha = -1$ or 1

for $\alpha = 1$, system of linear equations has no solution

$\alpha = 1$ के लिए सरल रेखा निकाय का कोई हल नहीं है।

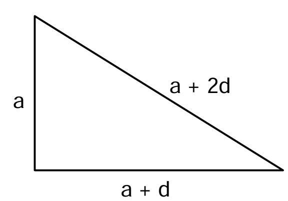
$\therefore \quad \alpha = -1$ so अतः $1 + \alpha + \alpha^2 = 1$

45. The sides of a right angled triangle are in arithmetic progression. If the triangle has area 24, then what is the length of its smallest side?

एक समकोणीय त्रिभुज (right angled triangle) की भुजायें समान्तर श्रेढी (arithmetic progression) में है। यदि इसका क्षेत्रफल 24 है तब इसकी सबसे छोटी भुजा की लम्बाई क्या है?

Sol. **(6)**

Sol.



$\frac{1}{2}a(a + d) = 24 \quad \Rightarrow \quad a(a + d) = 48 \quad$ ....(1)

$a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2 \Rightarrow \quad 3d^2 + 2ad - a^2 = 0$

$(3d - a)(a + d) = 0$

$\Rightarrow \quad 3d = a \quad (\because \ a + d \neq 0)$

$\Rightarrow \quad d = 2$

$a = 6$

so smallest side = 6

अतः सबसे छोटी भुजा = 6

46. Let $f : R \to R$ be a differentiable function such that $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ and $f'(0) = 1$. If

$g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} [f'(t)\operatorname{cosec} t - \cot t \operatorname{cosec} t\, f(t)]\, dt$ for $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, then $\lim_{x\to 0} g(x) =$

माना कि $f : R \to R$ इस प्रकार का अवकलनीय फलन (differentiable function) है कि $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ एवम्

$f'(0) = 1$ है। यदि $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ के लिये $g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} [f'(t)\operatorname{cosec} t - \cot t \operatorname{cosec} t\, f(t)]\, dt$ है, तब $\lim_{x\to 0} g(x) =$

Ans. **(2)**

Sol. $g(x) = \int_x^{\pi/2} \frac{d}{dt}(f(t)\operatorname{cosec} t)\, dt$

$g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(x) \operatorname{cosec} x$

$g(x) = 3 - f(x) \operatorname{cosec} x$

$g(x) = 3 - \frac{f(x)}{\sin x}$

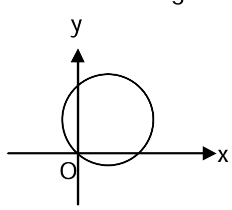
$\lim_{x\to 0} g(x) = 3 - \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin x}$

$= 3 - \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\cos x} = 3 - \frac{1}{1} = 2$

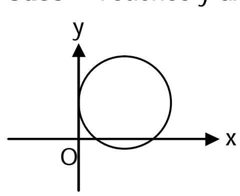
47. For how many values of p, the circle $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ and the coordinate axes have exactly three common points?
p के कितने मानों के लिये वृत्त (circle) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ एवम् निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) में केवल तीन बिन्दु उभयनिष्ठ (common) है?

Ans. **(2)**

Sol. **Case-I** Passing through origin $\Rightarrow p = 0$



Cass-II Touches y-axis and cuts x-axis



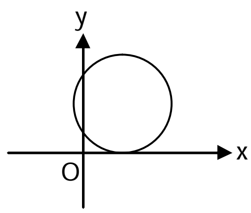
$f^2 - c = 0$ & $g^2 - c > 0$

$4 + p = 0 \qquad 1 + p > 0$

$p = -4$

Not possible

Case-III Touches x-axis and cuts y-axis

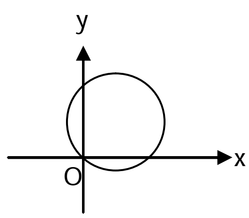


$f^2 - c > 0$ & $g^2 - c = 0$

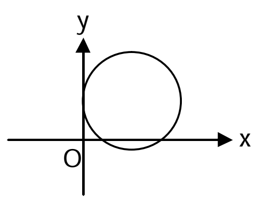
$4 + p > 0 \qquad 1 + p = 0$

So two value of p are possible

Hindi **Case-I** मूल बिन्दु से गुजरता है $\Rightarrow P = 0$



Cass-II y- अक्ष को स्पष्ट करता है, तथा x- अक्ष को काटता है।



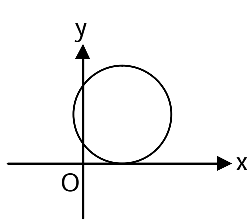
$f^2 - c = 0$ & $g^2 - c > 0$

$4 + p = 0 \qquad 1+p > 0$

$p = -4$

संभव नही

Case-III x- अक्ष को स्पष्ट करता है, तथा y- अक्ष को काटता है।



$f^2 - c > 0$ & $g^2 - c = 0$

$4 + p > 0 \qquad 1 + p = 0$

अतः p के दो मान सम्भव है।

48. Words of length 10 are formed using the letters A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Let x be the number of such words where no letter is repeated; and let y be the number of such words where exactly one letter is repeated twice and no other letter is repeated. Then, $\frac{y}{9x}$ =

अक्षरों A, B, C, D, E, F, G, H, I, J से 10 लम्बाई के शब्द बनाये जाते हैं। माना कि x इस तरह के उन शब्दों की संख्या है जिनमें किसी भी अक्षर की पुनरावृति नही होती है, तथा y इस तरह के उन शब्दों की संख्या है जिन में केवल एक अक्षर की पुनरावृति दो बार होती है व किसी अन्य अक्षर की पुनरावृति नही होती है। तब $\frac{y}{9x}$ =

Ans. **(5)**

Sol. A, B, C, D, E, F, G, H, I, J

$x = 10!$

$y = {}^{10}C_1 . {}^{10}C_2 . 8! \ {}^{9}C_8$

$$\frac{y}{9x} = \frac{{}^{10}C_1 . {}^{10}C_2 . 8! \times 9}{9 \times 10!} = \frac{10! \times 45}{9 \times 10!} = 5$$

SECTION – 3 : (Maximum Marks : 18)

- This section contains **SIX** questions of matching type.
- This section contains **TWO** tables (each having 3 columns and 4 rows).
- Based on each table, there are **THREE** questions
- Each question has **FOUR** options (A), (B), (C) and (D). **ONLY ONE** of these four options is correct.
- For each question, darken the bubble corresponding to the correct option in the ORS.
- For each question, marks will be awarded in one of the following categories :

  Full Marks : +3 If only the bubble corresponding to the correct option is darkened.
  Zero Marks : 0 If none of the bubbles is darkened.
  Negative Marks : –1 In all other cases.

खंड 3 : (अधिकतम अंक : 18)

- इस खंड में सुमेल प्रकार के **छः** प्रश्न हैं।
- इस खंड में दो टेबल हैं (प्रत्येक टेबल में 3 कॉलम और 4 पंक्तियां हैं)
- प्रत्येक टेबल पर आधारित **तीन** प्रश्न हैं।
- प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प (A), (B), (C) तथा (D) हैं। जिनमें **केवल एक विकल्प सही है।**
- प्रत्येक प्रश्न के लिए ओ.आर.एस. पर सही उत्तर विकल्प के अनुरूप बुलबुले को काला करें।
- प्रत्येक प्रश्न के लिए अंक निम्नलिखित परिस्थितियों में से **किसी एक के अनुसार दिये जायेंगे :**
- पूर्ण अंक : +3 यदि सिर्फ सही विकल्प के अनुरूप बुलबुले को काला किया है।

  शून्य अंक : 0 यदि किसी भी बुलबुले को काला नहीं किया है।
  ऋण अंक : –1 अन्य सभी परिस्थितयों में।

Answer Q.49, Q.50 and Q.51 by appropriately matching the information given in the three columns of the following table.

Columns 1, 2 and 3 contain conics, equations of tangents to the conics and points of contact, repectively.

Column-1	**Column-2**	**Column-3**
(I) $x^2 + y^2 = a^2$	(i) $my = m^2x + a$	(P) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
(II) $x^2 + a^2y^2 = a^2$	(ii) $y = mx + a\sqrt{m^2+1}$	(Q) $\left(\frac{-ma}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{a}{\sqrt{m^2+1}}\right)$
(III) $y^2 = 4ax$	(iii) $y = mx + \sqrt{a^2m^2-1}$	(R) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2m^2+1}}\right)$
(IV) $x^2 - a^2y^2 = a^2$	(iv) $y = mx + \sqrt{a^2m^2+1}$	(S) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2-1}}, \frac{-1}{\sqrt{a^2m^2-1}}\right)$

नीचे दी गयी टेबल के तीन कॉलमों में उपलब्ध सूचना का उपयुक्त ढंग से सुमेल कर प्रश्नों 49, 50 एवं 51 के उत्तर दीजिये।

कॉलम 1, 2 तथा 3 में क्रमशः कॉनिक (conic) पर स्पर्शरेखा (tangent) का समीकरण तथा स्पर्शबिन्दु (point of contact) दिये गये है।

कॉलम 1	**कॉलम 2**	**कॉलम 3**
(I) $x^2 + y^2 = a^2$	(i) $my = m^2x + a$	(P) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
(II) $x^2 + a^2y^2 = a^2$	(ii) $y = mx + a\sqrt{m^2+1}$	(Q) $\left(\frac{-ma}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{a}{\sqrt{m^2+1}}\right)$
(III) $y^2 = 4ax$	(iii) $y = mx + \sqrt{a^2m^2-1}$	(R) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2m^2+1}}\right)$
(IV) $x^2 - a^2y^2 = a^2$	(iv) $y = mx + \sqrt{a^2m^2+1}$	(S) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2-1}}, \frac{-1}{\sqrt{a^2m^2-1}}\right)$

49. For $a = \sqrt{2}$, if a tangent is drawn to a suitable conic (Column 1) at the point of contact (–1, 1), then which of the following options is the only CORRECT combination for obtaining its equation ?

$a = \sqrt{2}$ के लिये उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) पर एक स्पर्शरेखा खीची जाती है जिसका स्पर्शबिन्दु (–1, 1), तब निम्न में से कौन सा विकल्प इस स्पर्शरेखा का समीकरण प्राप्त करने का केवल सही संयोजन है?

(A) (I) (ii) (Q) (B) (I) (i) (P) (C) (III) (i) (P) (D) (II) (ii) (Q)

Ans. **(A)**

Sol. For $a = \sqrt{2}$, the equation of the circle is : $x^2 + y^2 = 2$

Equation of tangent at (–1, 1) is: $-x + y = 2$

Point of contact: $\left(\frac{-ma}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{a}{\sqrt{m^2+1}}\right) \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow (-1, 1)$

Hindi $a = \sqrt{2}$ के लिए वृत्त का समीकरण: $x^2 + y^2 = 2$

$(-1, 1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $-x + y = 2$

स्पर्श बिन्दु $\left(\frac{-ma}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{a}{\sqrt{m^2+1}}\right) \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow (-1, 1)$

50. The tangent to a suitable conic (Column 1) at $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ is found to be $\sqrt{3}$ x + 2y = 4, then which of the following options is the only CORRECT combination?

यदि उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) के बिन्दु $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ पर स्पर्शरेखा $\sqrt{3}$ x + 2y = 4 है, तब निम्न में से कौन सा विकल्प केवल सही संयोजन है ?

(A) (IV) (iv) (S) (B) (II) (iv) (R) (C) (IV) (iii) (S) (D) (II) (iii) (R)

Ans. **(B)**

Sol. (A) $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$

Equation of tangent at $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ is : $x\sqrt{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{4}$.

$\therefore$ option (A) is incorrect.

(B) Satisfying the point $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ in the curve $x^2 + a^2y^2 = a^2$, we get $3 + \frac{a^2}{4} = a^2$

$\Rightarrow \frac{3a^2}{4} = 3 \Rightarrow a^2 = 4$ $\therefore$ the conic is: $x^2 + 4y^2 = 4$

Equation of tangent at $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ is: $\sqrt{3}x + 2y = 4$

Hindi (A) $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$

$\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण $x\sqrt{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{4}$.

$\therefore$ विकल्प (A) असत्य है

(B) वक्र $x^2 + a^2y^2 = a^2$ में बिन्दु $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ रखने पर

$3 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow \frac{3a^2}{4} = 3 \Rightarrow a^2 = 4$ $\therefore$ वक्र $x^2 + 4y^2 = 4$ है।

$\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$ पर स्पर्श रेखा $\sqrt{3}x + 2y = 4$

51. If a tangent to a suitable conic (Column 1) is found to be $y = x + 8$ and its point of contact is (8, 16), then which of the following options is the only CORRECT combination?

यदि उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) के स्पर्शबिन्दु (8, 16), पर स्पर्शरेखा $y = x + 8$ है, तब निम्न में से कौन सा विकल्प केवल सही संयोजन है ?

(A) (III) (i) (P) (B) (I) (ii) (Q) (C) (II) (iv) (R) (D) (III) (ii) (Q)

Ans. **(A)**

Sol. The equation of given tangent is: $y = x + 8$

Satisfying the point $(8,16)$ in the curve $y^2 = 4ax$ we get, $a = 8$.

Now comparing the given tangent with the general tangent to the parabola, $y = mx + \frac{a}{m}$,

we get $m = 1$.

Point of contact is $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right) \Rightarrow (8, 16)$

Hindi : दी गई स्पर्श रेखा का समीकरण $y = x + 8$

वक्र $y^2 = 4ax$ में बिन्दु $(8,16)$ रखने पर $a = 8$.

अब दी गई स्पर्श रेखा की तुलना परवलय की व्यापक स्पर्श रेखा$y = mx + \frac{a}{m}$ से करने पर

$m = 1$.

स्पर्श बिन्दु$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right) \Rightarrow (8, 16)$

Answer Q.52, Q.53 and Q.54 by appropriately matching the information given in the three columns of the following table.

Let $f(x) = x + \log_e x - x\log_e x$, $x \in (0, \infty)$
- Column1 contains information about zeros of $f(x)$, $f'(x)$ and $f''(x)$.
- Column2 contains information about the limiting behavior of $f(x)$, $f'(x)$ and $f''(x)$ at infinity.
- Column3 contains information about increasing/decreasing nature of $f(x)$ and $f'(x)$.

Column-1	**Column-2**	**Column-3**
(I) $f(x) = 0$ for some $x \in (1, e^2)$	(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$	(P) f is increasing in (0, 1)
(II) $f'(x) = 0$ for some $x \in (1, e)$	(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	(Q) f is decreasing in (e, e^2)
(III) $f'(x) = 0$ for some $x \in (0, 1)$	(iii) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = -\infty$	(R) f' is increasing in (0, 1)
(IV) $f''(x) = 0$ for some $x \in (1, e)$	(iv) $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$	(S) f' is decreasing in (e, e^2)

नीचे दी गयी टेबल के तीन कॉलमों में उपलब्ध सूचना का उपयुक्त ढंग से सुमेल कर प्रश्नों 52, 53 एवं 54 के उत्तर दीजिये।

माना कि $f(x) = x + \log_e x - x\log_e x,\ x \in (0, \infty)$ है।

- कॉलम 1 मे $f(x)$, $f'(x)$ एवम् $f''(x)$ के शून्यों की सूचना दी गई हैं।
- कॉलम 2 मे $f(x)$, $f'(x)$ एवम् $f''(x)$ के अनन्त की तरफ सीमा पर व्यवहार (limiting behavior at infinity) की सूचना दी गई है।
- कॉलम 3 मे $f(x)$ एवम् $f'(x)$ के वर्धमान/ह्रासमान (increasing/decreasing) होने की प्रकृति (nature) की सूचना दी गई है।

कॉलम 1	कॉलम 2	कॉलम 3
(I) $f(x) = 0$ किसी $x \in (1, e^2)$ के लिये	(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$	(P) f $(0, 1)$ वर्धमान है
(II) $f'(x) = 0$ किसी $x \in (1, e)$ के लिये	(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	(Q) f मे (e, e^2) ह्रासमान है
(III) $f'(x) = 0$ किसी $x \in (0, 1)$ के लिये	(iii) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = -\infty$	(R) f′ में $(0, 1)$ वर्धमान है
(IV) $f''(x) = 0$ किसी $x \in (1, e)$ के लिये	(iv) $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$	(S) f′ में (e, e^2) ह्रासमान है

52. Which of the following options is the only INCORRECT combination?
निम्न मे से कौन सा विकल्प केवल गलत संयोजन (only INCORRECT combination) है?
(A) (I) (iii) (P) (B) (II) (iv) (Q) (C) (II) (iii) (P) (D) (III) (i) (R)

53. Which of the following options is the only CORRECT combination?
निम्न में से कौन सा विकल्प केवल सही संयोजन है ?
(A) (I) (ii) (R) (B) (III) (iv) (P) (C) (II) (iii) (S) (D) (IV) (i) (S)

54. Which of the following options is the only CORRECT combination?
निम्न में से कौन सा विकल्प केवल सही संयोजन है ?
(A) (III) (iii) (R) (B) (IV) (iv) (S) (C) (II) (ii) (Q) (D) (I) (i) (P)

Ans. **52. (D) 53. (C) 54. (C)**

Sol. $f(x) = x + \ell nx - x\,\ell nx$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \ell nx - x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \ell nx$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$\therefore$ f'(x) is strictly decreasing function for $x \in (0, \infty)$

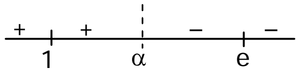
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \text{ has only one real root in } (0, \infty)$$

$f'(1) = 1 > 0$

$f'(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

$\therefore$ f '(x) = 0 has one root in (1, e)

Let $f'(\alpha) = 0$, where $\alpha \in (1, e)$



$\therefore$ f(x) is increasing in $(0, \alpha)$ and decreasing in (α, ∞)

$f(1) = 1$ and $f(e^2) = e^2 + 2 - 2e^2 = 2 - e^2 < 0$

$\Rightarrow$ f(x) = 0 has one root in $(1, e^2)$

From column 1 : I and II are correct.

From column 2 : ii, iii, and iv are correct.

From column 3 : P, Q, S are correct

Hindi : $f(x) = x + \ell nx - x\,\ell nx$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \ell nx - x\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \ell nx$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in (0, \infty)$$

$\therefore$ $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$ में निरन्तर ह्रासमान है

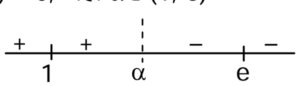
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \infty\end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ का केवल एक वास्तविक मूल } (0, \infty) \text{ में है}$$

$f'(1) = 1 > 0$

$f'(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

$\therefore$ $f'(x) = 0$ का एक मूल $(1, e)$ में है।

माना $f'(\alpha) = 0$, जहाँ $\alpha \in (1, e)$



$\therefore$ f(x), $(0, \alpha)$ में वर्धमान तथा (α, ∞) में ह्रासमान

$f(1) = 1$ और $f(e^2) = e^2 + 2 - 2e^2 = 2 - e^2 < 0$

$\Rightarrow$ f(x) = 0 का एक मूल $(1, e^2)$ में है।

स्तम्भ 1 से : I और II सत्य है।

स्तम्भ 2 : ii, iii, तथा iv सत्य है।

स्तम्भा 3 : P, Q, S सत्य है।